VỀ SỰ TỒN TẠI ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA CÁC ÁNH XẠ T-CO YẾU VÀ T-CO YẾU SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIANG KIỂU b-MÊTRIC

Đinh Huy Hoàng (1), **Nguyễn Thế Huế** (2), **Nguyễn Tuấn Ngọc** (2)
1 *Viện Sư phạm Tự nhiên, Trường Đại học Vinh*
2 *Trường THPT Ngô Quyền, Quảng Bình*
Ngày nhận bài 08/01/2019, ngày nhận đăng 25/02/2019

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập và chứng minh một vài kết quả về sự tồn tại và duy nhất điểm bất động của các ánh xạ *T-co* yếu và *T-co* yếu suy rộng trong không gian kiểu b-mêtric. Các kết quả này là sự mở rộng của một số kết quả về điểm bất động trong không gian b-mêtric trong các tài liệu tham khảo [3] [10].

1 Mở đầu

Các khái niệm ánh xạ *K-co* và *C-co* lần lượt được giới thiệu và nghiên cứu bởi R.Kannan [7] và S.K.Chatterjea [2]. A.Razani và V.Pavaneh [11] đã đưa ra các khái niệm ánh xạ *T-co* yếu suy rộng kiểu Kannan và kiểu Chatterjea và chứng minh một số kết quả về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ này trong không gian mêtric. S.Czerwik [5] đã mở rộng khái niệm không gian mêtric bằng cách đưa ra khái niệm không gian b-mêtric và chứng minh sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ *co* trong không gian này. Năm 2014, Z.Mustafa [10] và các cộng sự đã mở rộng các kết quả của A.Razani và V.Pavaneh [11] cho không gian b-mêtric. Không gian kiểu b-mêtric đã được đưa ra và nghiên cứu bởi M.A.Alghamdi và các cộng sự [1] vào năm 2013. Sau đó, vấn đề về sự tồn tại điểm bất động trong không gian kiểu b-mêtric đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và thu được nhiều kết quả [3], [4], [6].

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập và chứng minh hai định lí và các hệ quả của nó về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ *T-co* yếu và *T-co* yếu suy rộng trong không gian kiểu b-mêtric. Các kết quả này là mở rộng của một số kết quả trong các tài liệu [3] [10].

1.1. Định nghĩa. Giả sử (X, d) là không gian mêtric và $f : X \longrightarrow X$.

1) [7] Ánh xạ f được gọi là *K-co* nếu tồn tại $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ sao cho

$$d(fx, fy) \leq \alpha\big(d(x, fx) + d(y, fy)\big) \quad \forall x, y \in X.$$

2) [2] Ánh xạ f được gọi là *C-co* nếu tồn tại $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ sao cho

$$d(fx, fy) \leq \alpha\big(d(x, fy) + d(y, fx)\big) \quad \forall x, y \in X.$$

Năm 1968, R.Kannan [7] đã chứng minh rằng nếu (X, d) là không gian mêtric đầy đủ thì mỗi ánh xạ *K-co* trên X có duy nhất một điểm bất động. Năm 1972, S.K.Chatterjea [2] đã chứng tỏ ánh xạ *C-co* trong không gian mêtric đầy đủ có duy nhất một điểm bất động.

1.2. Định nghĩa. Giả sử (X, d) là không gian mêtric, $f : X \longrightarrow X$ và $\varphi : [0, +\infty)^2 \longrightarrow [0, +\infty)$ là ánh xạ liên tục sao cho $\varphi(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = 0$.

1) [4] Ánh xạ f được gọi là *co yếu kiểu Chatterjea*, nói gọn là *C-co* yếu nếu

$$d(fx, fy) \leq \frac{1}{2}\big(d(x, fy) + d(y, fx)\big) - \varphi\big(d(x, fy), d(y, fx)\big) \quad \forall x, y \in X.$$

2) [11] Ánh xạ f được gọi là *co yếu kiểu Kannan*, nói gọn là *K-co* yếu nếu

$$d(fx, fy) \leq \frac{1}{2}\big(d(x, fx) + d(y, fy)\big) - \varphi\big(d(x, fx), d(y, fy)\big) \quad \forall x, y \in X.$$

Chú ý: Trong bài báo này dùng kí hiệu ∞ thay cho $+\infty$.

1.3. Định nghĩa. Giả sử (X, d) là không gian mêtric và $T : X \longrightarrow X$.

1) [9] Ánh xạ $f : X \longrightarrow X$ được gọi là *T-co kiểu Kannan* nếu tồn tại $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ sao cho

$$d(Tfx, Tfy) \leq \alpha\big(d(Tx, Tfx) + d(Ty, Tfy)\big) \quad \forall x, y \in X.$$

2) [11] Ánh xạ $f : X \longrightarrow X$ được gọi là *T-co kiểu Chatterjea* nếu tồn tại $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ sao cho

$$d(Tfx, Tfy) \leq \alpha\big(d(Tx, Tfy) + d(Ty, Tfx)\big) \quad \forall x, y \in X.$$

1.4. Định nghĩa. [8] Hàm $\psi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ được gọi là *hàm thay đổi khoảng cách* nếu

1) ψ liên tục và tăng ngặt.
2) $\psi\ (0) = 0$.

1.5. Định nghĩa. [11] Giả sử (X, d) là không gian mêtric, $T : X \longrightarrow X$, ψ là hàm thay đổi khoảng cách còn $\varphi : [0, \infty)^2 \longrightarrow [0, \infty)$ là hàm liên tục và $\varphi(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = 0$.

1) Ánh xạ $f : X \longrightarrow X$ được gọi là *T-co yếu suy rộng kiểu Chatterjea* nếu

$$\psi\big(d(Tfx, Tfy)\big) \leq \psi\left(\frac{d(Tx, Tfy) + d(Ty, Tfx)}{2}\right) - \varphi\big(d(Tx, Tfy), d(Ty, Tfx)\big), \quad \forall x, y \in X.$$

2) Ánh xạ $f : X \longrightarrow X$ được gọi là *T-co yếu suy rộng kiểu Kannan* nếu

$$\psi\big(d(Tfx, Tfy)\big) \leq \psi\left(\frac{d(Tx, Tfx) + d(Ty, Tfy)}{2}\right) - \varphi\big(d(Tx, Tfx), d(Ty, Tfy)\big), \quad \forall x, y \in X.$$

Trong Định nghĩa 1.5, nếu lấy hàm $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ với $\psi(t) = t$ với mọi $t \in [0, \infty)$ thì ta nhận được Định nghĩa 1.2.

1.6. Định nghĩa. [5] Giả sử E là một tập hợp khác rỗng và số thực $k \geq 1$. Hàm d: $E \times E \longrightarrow$ được gọi là *b-mêtric* trên E nếu

1) $d(a, b) \geq 0$ với mọi $a, b \in E$;

2) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
3) $d(a,b) \leq k[d(a,c) + d(c,b)]$ với mọi $a, b, c \in E$ (bất đẳng thức tam giác);
4) $d(a,b) = d(b,a)$ với mọi $a, b \in E$.

Tập E cùng với một b-mêtric trên nó được gọi *là không gian b-mêtric với tham số* k, nói gọn là *không gian b-mêtric* và được kí hiệu bởi (E,d) hoặc E.

1.7. Định nghĩa [1] Giả sử E là tập khác rỗng. Hàm $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *kiểu b-mêtric* trên E nếu tồn tại tham số $k \geq 1$ sao cho với mọi $a, b, c \in E$, các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $d(a,b) \geq 0$;
(ii) $d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$;
(iii) $d(a,b) \leq k[d(a,c) + d(c,b)]$ (Bất đẳng thức tam giác);
(iv) $d(a,b) = d(b,a)$.

Khi đó, cặp (E,d) được gọi là *không gian kiểu b-mêtric* với tham số k. Nếu (E,d) là không gian kiểu b-mêtric với $k = 1$ thì nó được gọi là *không gian kiểu mêtric.*

1.8. Ví dụ [1] Giả sử $E = [0, \infty)$. Hàm $d : E^2 \longrightarrow [0, \infty)$ xác định bởi

$$d(a,b) = (a+b)^2 \quad \forall a, b \in E.$$

Khi đó (E,d) là một không gian kiểu b-mêtric với tham số $k = 2$. Mặt khác (E,d) không phải là không gian b-mêtric hay kiểu mêtric. Thật vậy, với mọi $a, b, c \in E$, ta có

$$\begin{aligned} d(a,b) = (a+b)^2 &\leq (a+c+c+b)^2 \\ &= (a+c)^2 + (c+b)^2 + 2(a+c)(c+b) \\ &\leq 2\left[(a+c)^2 + (c+b)^2\right] \\ &= 2\left[d(a,c) + d(c,b)\right]. \end{aligned}$$

Bởi vậy, iii) đúng và rõ ràng i) và ii) đúng. Do đó (E,d) là không gian kiểu b-mêtric với $k = 2$.

Từ $d(1,1) = 4$ suy ra (E,d) không là không gian b-mêtric.

Từ $d(1,2) = 9 \geq 5 = d(1,0) + d(0,2)$ suy ra (E,d) không là không gian kiểu mêtric.

1.9. Định nghĩa. [1] Giả sử $\{a_n\}$ là một dãy trong không gian kiểu b-mêtric (E,d). Điểm $a \in E$ được gọi là *giới hạn* của dãy $\{a_n\}$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(a, a_n) = d(a,a)$.

Khi đó, ta nói rằng $\{a_n\}$ *hội tụ* về a và kí hiệu là $a_n \to a$ khi $n \to \infty$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

1.10. Định nghĩa. [1] Giả sử (E,d) là một không gian kiểu b-mêtric

1) Dãy $\{a_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(a_n, a_m)$ tồn tại và hữu hạn.

2) Không gian kiểu b-mêtric được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy $\{a_n\}$ trong E đều hội tụ về a thuộc E sao cho
$\lim\limits_{m,n\to\infty} d(a_n, a_m) = d(a,a) = \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a)$.

1.11. Định lý. [1] *Giả sử (E,d) là một không gian kiểu b-mêtric và $\{a_n\}$ là một dãy trong E sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$. Khi đó:*

1) a là duy nhất.

2) $\frac{1}{k}d(a,b) \le \lim_{n\to\infty} d(a_n,b) \le kd(a,b)$, $\forall b \in E$.

1.12. Định lý. [1] *Giả sử (E,d) là một không gian kiểu b-mêtric và $\{a_n\}_{i=0}^n \subset E$, khi đó*

$$d(a_n,a_0) \le kd(a_0,a_1) + ... + k^{n-1}d(a_{n-2},a_{n-1}) + k^{n-1}d(a_{n-1},a_n).$$

1.13. Định nghĩa. Giả sử (E,d) là không gian kiểu b-mêtric và $T: E \longrightarrow E$.

1) [3] Ánh xạ T được gọi là *liên tục* nếu với mọi dãy $\{a_n\} \subset E$ mà $a_n \to a$ thì $\lim_{n\to\infty} d(Ta_n,Ta) = d(Ta,Ta)$.

2) Ánh xạ T được gọi là *hội tụ dãy con* nếu $\{a_n\}$ là dãy trong E sao cho $\{Ta_n\}$ là dãy hội tụ thì tồn tại dãy con $\{a_{n_i}\}$ của $\{a_n\}$ và $a \in E$ thỏa mãn $a_{n_i} \to a$ và $d(Ta,Ta) = 0$.

3) Ánh xạ T được gọi là *hội tụ dãy* nếu $\{a_n\}$ là dãy trong E sao cho dãy $\{Ta_n\}$ hội tụ thì tồn tại $a \in E$ sao cho $a_n \to a$ và $d(Ta,Ta) = 0$.

4) Nếu $Ta = a$ thì a được gọi là *điểm bất động* của T trong E.

2 Các kết quả chính

Ta kí hiệu

$\Psi = \Big\{\psi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) \mid \psi$ liên tục, tăng ngặt và $\psi(0) = 0\Big\}$;

$\Phi_1 = \Big\{\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) | \varphi$ liên tục, không giảm, $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0\Big\}$;

$\Phi_2 = \Big\{\varphi : [0,\infty)^2 \longrightarrow [0,\infty) | \varphi(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ và

$$\varphi\left(\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} b_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} \varphi(a_n,b_n)\Big\}.$$

2.1. Định nghĩa. Giả sử (E,d) là không gian kiểu b-mêtric và $T: E \longrightarrow E$. Ánh xạ $f: E \longrightarrow E$ được gọi là *T-co* yếu nếu tồn tại các hằng số $r_1, r_2, r_3 \in \left[0, \frac{1}{k}\right]$ và tồn tại $\varphi \in \Phi_1$ sao cho

$$\begin{aligned} d(Tfa,Tfb) \le\ & r_1kd(Ta,Tb) + r_2[d(Ta,Tfb) + d(Tb,Tfa)] \\ & + r_3k[d(Ta,Tfa) + d(Tb,Tfb)] \\ & - \varphi(d(Ta,Tb)), \end{aligned} \tag{1}$$

với mọi $a, b \in E$.
Các hằng số r_1, r_2, r_3 trong (1) được gọi là các hằng số *co* của f.
Trong phần này, ta giả thiết $T: E \longrightarrow E$ là ánh xạ liên tục và đơn ánh.

2.2. Định lý. *Giả sử (E, d) là không gian kiểu b-mêtric đầy đủ và $f : E \longrightarrow E$ là ánh xạ T-co yếu với các hằng số co r_1, r_2, r_3 thỏa mãn các điều kiện*

$$r_1 + 4r_2 + 2r_3 \leq \frac{1}{k}, \tag{2}$$

$$r_2 + r_3 < \frac{1}{k^2}, \tag{3}$$

$$r_1 + 2r_2 \leq \frac{1}{k^2}, \tag{4}$$

với mọi $a, b \in E$. Khi đó

1) *Với mỗi $a_0 \in E$, dãy $\{Tf^n a_0\}$ hội tụ.*
2) *Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy con thì f có điểm bất động duy nhất.*
3) *Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $a_0 \in E$, dãy $\{f^n a_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của f.*

Chứng minh. 1) Lấy $a_0 \in E$ và xác định dãy $\{a_n\}$ bởi

$$a_{n+1} = fa_n = f^n a_0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots.$$

Đặt $Ta_n = b_n$ với mọi $n = 0, 1, \ldots$.

Đầu tiên, ta chứng minh $d(b_n, b_{n+1}) \to 0$ khi $n \to \infty$. Sử dụng điều kiện (1) ta có

$$\begin{aligned}
d(b_{n+1}, b_n) &= d(Tfa_n, Tfa_{n-1}) \\
&\leq r_1 k d(b_n, b_{n-1}) + r_2 \left[d(b_n, b_n) + d(b_{n-1}, b_{n+1})\right] \\
&\quad + r_3 k[d(b_n, b_{n+1}) + d(b_{n-1}, b_n)] - \varphi(d(b_n, b_{n-1})) \\
&\leq r_1 k d(b_n, b_{n-1}) + r_2 k[d(b_n, b_{n-1}) + d(b_{n-1}, b_n) \\
&\quad + d(b_{n-1}, b_n) + d(b_n, b_{n+1})] + r_3 k[d(b_n, b_{n+1}) \\
&\quad + d(b_{n-1}, b_n)] - \varphi(d(b_n, b_{n-1})) \\
&= k(r_1 + 3r_2 + r_3) d(b_n, b_{n-1}) \\
&\quad + k(r_2 + r_3) d(b_{n+1}, b_n) - \varphi(d(b_n, b_{n-1})),
\end{aligned} \tag{5}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Do đó

$$\begin{aligned}
d(b_{n+1}, b_n) &\leq \frac{k(r_1 + 3r_2 + r_3)}{1 - k(r_2 + r_3)} d(b_n, b_{n-1}) \\
&\leq d(b_n, b_{n-1}) \quad \forall n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

Vì từ (2) nên ta có $\dfrac{k(r_1 + 3r_2 + r_3)}{1 - k(r_2 + r_3)} \leq 1$. Điều này chứng tỏ $\{d(b_{n+1}, b_n)\}$ là dãy các số không âm, giảm. Do đó, tồn tại

$$\lim_{n \to \infty} d(b_n, b_{n+1}) := c \geq 0.$$

Từ (5) và tính liên tục của φ suy ra $c \leq kc(r_1 + 4r_2 + 2r_3) - \varphi(c)$. Kết hợp với $k(r_1 + 4r_2 + 2r_3) \leq 1$ suy ra $\varphi(c) = 0$. Theo tính chất của φ thì $c = 0$, tức $\lim\limits_{n \to \infty} d(b_n, b_{n+1}) = 0$.

Với mọi $\epsilon \geq 0$, vì $\lim\limits_{n \to \infty} d(b_n, b_{n+1}) = 0$ nên tồn tai số tự nhiên n_ϵ sao cho, với mọi $n \geq n_\epsilon$ ta có

$$d(b_n, b_{n+1}) < \min\left\{\frac{\epsilon}{3(k+1)}, \frac{k}{2(k+1)} \varphi\left(\frac{\epsilon}{3(k+1)}\right)\right\}. \tag{6}$$

Tiếp theo, ta chứng minh khẳng định sau:

(G) Nếu với mọi $n_0 \geq n_\epsilon$ mà $d(b_n, b_{n_0}) < \epsilon$ với mọi $n > n_\epsilon$ thì $d(b_{n+1}, b_{n_0}) < \epsilon$.

Thật vậy, từ bất đẳng thức tam giác và điều kiện (1) suy ra rằng

$$\begin{aligned}
d\left(b_{n+1}, b_{n_0}\right) &= d\left(Tfa_n, Tfa_{n_0-1}\right) \\
&\leq kd(Tfa_n, Tfa_{n_0}) + kd(Tfa_{n_0}, Tfa_{n_0-1}) \\
&\leq kd(b_{n_0+1}, b_{n_0}) + k^2 r_1 d(b_n, b_{n_0}) + kr_2[d(b_n, b_{n_0+1}) + d(b_{n_0}, b_{n+1})] \\
&+ k^2 r_3[d(b_n, b_{n+1}) + d(b_{n_0}, b_{n_0+1})] - k\varphi(d(b_n, b_{n_0})) \\
&\leq k(1 + kr_3) d(b_{n_0}, b_{n_0+1}) + k^2 r_1 d(b_n, b_{n_0}) \\
&+ k^2 r_2\left[d(b_n, b_{n_0}) + d(b_{n_0}, b_{n_0+1}) + d(b_{n_0}, b_n) + d(b_n, b_{n+1})\right] \\
&+ k^2 r_3 d(b_n, b_{n+1}) - k\varphi(d(b_n, b_{n_0})) \\
&= k(1 + kr_2 + kr_3) d(b_{n_0}, b_{n_0+1}) + k^2(r_1 + 2r_2) d(b_n, b_{n_0}) \\
&+ k^2(r_2 + r_3) d(b_n, b_{n+1}) - k\varphi(d(b_n, b_{n_0})) \\
&\leq k\left(1 + \frac{1}{k}\right) d(b_{n_0}, b_{n_0+1}) + d(b_n, b_{n_0}) \\
&+ d(b_n, b_{n+1}) - k\varphi(d(b_n, b_{n_0})) \quad \forall n \geq n_\epsilon. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Trường hợp 1. Giả sử $d(b_n, b_{n_0}) < \dfrac{\epsilon}{3(k+1)}$. Khi đó, từ (6) và (7) suy ra với mọi $\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_\varepsilon$ ta có

$$d(b_{n+1}, b_{n_0}) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3(k+1)} + \frac{\epsilon}{3(k+1)} < \epsilon.$$

Trường hợp 2. Giả sử $\dfrac{\epsilon}{3(k+1)} \leq d(b_n, b_{n_0}) < \epsilon$. Khi đó, từ (7) và tính không giảm của φ suy ra với mọi $\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_\varepsilon$ ta có

$$\begin{aligned}
d(b_{n+1}, b_{n_0}) < \epsilon + \frac{k}{2}\varphi\left(\frac{\epsilon}{3(k+1)}\right) + \frac{k}{2(k+1)}\varphi\left(\frac{\epsilon}{3(k+1)}\right) \\
- k\varphi\left(\frac{\epsilon}{3(k+1)}\right) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Như vậy khẳng định (G) được chứng minh.

Bây giờ, ta chứng minh $\{b_n\}$ là dãy Cauchy. Cố định $n_0 \geq n_\epsilon$. Khi đó, từ (6) và khẳng định (G) suy ra $d(b_{n_0+2}, b_{n_0}) < \epsilon$. Sử dụng tiếp khẳng định (G) ta suy ra $d(b_{n_0+3}, b_{n_0}) < \epsilon$. Tiếp tục lý luận tương tự ta có $d(b_n, b_{n_0}) < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Từ đó suy ra rằng, với mọi $n, m \geq n_0$ ta có

$$d(b_n, b_m) \leq k[d(b_n, b_{n_0}) + d(b_{n_0}, b_m)] < 2k\epsilon.$$

Do đó $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(b_n, b_m) = 0$.

Như vậy $\{b_n\}$ là dãy Cauchy. Vì (E, d) đầy đủ nên tồn tại $b \in E$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} d(b, b_n) = \lim_{n,m\to\infty} d(b_n, b_m) = d(b, b) = 0. \qquad (8)$$

Như vậy $b_n \to b$, tức $Tf^n a_0 \to b$. Khẳng định 1) được chứng minh.

2) Giả sử T là ánh xạ hội tụ dãy con. Khi đó, vì $\{Tfa_n\} = \{b_{n+1}\}$ là dãy hội tụ nên tồn tại dãy con $\{fa_{n_i}\}$ của $\{fa_n\}$ sao cho $fa_{n_i} \to a \in E$ và $d(Ta, Ta) = 0$, tức

$$\lim_{n_i \to \infty} d(fa_{n_i}, a) = d(a, a).$$

Vì T liên tục nên $\lim\limits_{n_i \to \infty} d(Tfa_{n_i}, Ta) = d(Ta, Ta) = 0$.
Mặt khác, $Tfa_n \to b$, $d(b, b) = 0$ và $\{Tfa_{n_i}\}$ là dãy con của $\{Tfa_n\}$ nên

$$\lim_{n_i \to \infty} d(Tfa_{n_i}, b) = \lim_{n \to \infty} d(Tfa_n, b) = 0.$$

Do đó theo Định lý 1.11. 1) thì $Ta = b$. Tiếp theo chứng minh a là điểm bất động của f. Từ bất đẳng thức tam giác và điều kiện (1) suy ra

$$\begin{aligned} d(Tfa, Ta) &\le kd(Tfa, Tfa_n) + kd(Tfa_n, Ta) \\ &\le kd(b_{n+1}, b) + k^2 r_1 d(b, b_n) + r_2 k[d(b, b_{n+1}) + d(b_n, Tfa)] \\ &+ k^2 r_3 [d(b, Tfa) + d(b_n, b_{n+1})] - k\varphi(d(b, b_n)) \\ &\le k(1 + r_2) d(b_{n+1}, b) + k^2 r_1 d(b, b_n) + k^2 r_2 [d(b_n, b) + d(b, Tfa)] \\ &+ k^2 r_3 [d(b, Tfa) + d(b_n, b_{n+1})] - k\varphi(d(b, b_n)) \\ &= k(1 + r_2) d(b_{n+1}, b) + k^2 (r_1 + r_2) d(b, b_n) \\ &+ k^2 (r_2 + r_3) d(b, Tfa) + k^2 r_3 d(b_n, b_{n+1}) \\ &- k\varphi(d(b, b_n)) \quad \forall n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ ta được $d(b, Tfa) \le k^2 (r_2 + r_3) d(b, Tfa)$.
Từ bất đẳng thức này và điều kiện (3) ta có $d(b, Tfa) = 0$, tức $b = Tfa$ hay $Ta = Tfa$. Vì T đơn ánh nên $a = fa$. Vậy a là điểm bất động của f.

Cuối cùng, ta chứng minh a là điểm bất động duy nhất của f. Giả sử a' cũng là một điểm bất động của f khi đó

$$\begin{aligned} d(Ta', Ta') &= d(Tfa', Tfa') \\ &\le r_1 k d(Ta', Ta') + r_2 [d(Ta', Ta') + d(Ta', Ta')] \\ &+ r_3 k [d(Ta', Ta') + d(Ta', Ta')] - \varphi(d(Ta', Ta')) \\ &= (kr_1 + 2r_2 + 2kr_3) d(Ta', Ta') - \varphi(d(Ta', Ta')). \end{aligned}$$

Mặt khác từ (2) suy ra $kr_1 + 2r_2 + 2kr_3 \le 1$. Do đó, từ bất đẳng trên suy ra $\varphi(d(Ta', Ta')) = 0$.
Theo tính chất của φ thì $d(Ta', Ta') = 0$.
Sử dụng điều kiện (1) ta có

$$\begin{aligned} d(Ta, Ta') = d(Tfa, Tfa') &\le r_1 k d(Ta, Ta') \\ &+ r_2 [d(Ta, Ta') + d(Ta, Ta')] \\ &+ r_3 k [d(Ta, Ta) + d(Ta', Ta')] - \varphi(d(Ta, Ta')) \\ &= (r_1 k + 2r_2) d(Ta, Ta') - \varphi(d(Ta, Ta')). \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) suy ra $\varphi(d(Ta, Ta')) = 0$.
Do đó $d(Ta, Ta') = 0$ và ta có $Ta = Ta'$. Vì T đơn ánh nên $a = a'$.

3) Giả sử T là ánh xạ hội tụ dãy. Khi đó, trong chứng minh 2) thay $\{fa_{n_i}\}$ bởi $\{fa_n\}$ ta có $fa_n \to a$. □

2.3. Hệ quả. [3] *Giả sử (E, d) là không gian kiểu b-mêtric đầy đủ và $f : E \longrightarrow E$ là ánh xạ thỏa mãn*

$$d(fa, fb) \le \frac{1}{k} d(a, b) - \varphi(d(a, b)) \quad \forall a, b \in E,$$

trong đó $\varphi \in \Phi_1$. Khi đó, f có duy nhất điểm bất động.

Chứng minh. Giả sử $T : E \longrightarrow E$ là ánh xạ đồng nhất, tức $T(a) = a \quad \forall a \in E$.
Đặt $r_1 = \dfrac{1}{k^2}, r_2 = r_3 = 0$. Khi đó, các điều kiện của Định lý 2.2 được thỏa mãn. Do đó f có duy nhất một điểm bất động trong E. □

Ví dụ sau đây chứng tỏ Định lý 2.2 là mở rộng thực sự của Định lý 2.1, [3].

2.4. Ví dụ. Cho $E = \{1, 2, 3\}$ và $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm được xác định bởi

$$d(1, 2) = d(1, 3) = d(3, 3) = 1,$$

$$d(1, 1) = d(2, 2) = 0, d(2, 3) = 5,$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E$$

Ta dễ dàng kiểm tra được (E, d) là không gian kiểu b-mêtric đầy đủ với tham số $k = \dfrac{5}{2}$.
Giả sử $T, f : E \longrightarrow E$ là hai ánh xạ được cho bởi

$$T1 = 1, T2 = 3, T3 = 2, f1 = f2 = 1, f3 = 2.$$

Ta xác định hàm $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ với

$$\varphi(t) = \frac{1}{4} t \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Rõ ràng $\varphi \in \Phi_1$. Đặt $r_1 = r_2 = 0, r_3 = \dfrac{3}{25}$. Khi đó, ta kiểm tra được tất cả các điều kiện của Định lý 2.2 đều được thỏa mãn. Do đó Định lý 2.2 áp dụng được cho hàm f.
Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} d(f1, f2) = d(1, 2) = 1 &> \frac{2}{5} = \frac{1}{k} d(1, 3) \\ &> \frac{1}{k} d(1, 3) - \varphi_1(d(1, 3)) \end{aligned}$$

với mọi $\varphi_1 \in \Phi_1$. Điều này chứng tỏ Hệ quả 2.3 tức là Định lý 2.1, [3] không áp dụng được cho f.

2.5. Hệ quả. *Giả sử (E, d) là không gian kiểu b-mêtric đầy đủ, $f : E \longrightarrow E$ là ánh xạ sao cho tồn tại các hằng số không âm s_1, s_2, s_3 thỏa mãn:*

$$s_1 + 4s_2 + 2s_3 < \frac{1}{k}, \tag{9}$$

$$s_2 + s_3 < \frac{1}{k^2}, \tag{10}$$

$$s_1 + 2s_2 < \frac{1}{k^2} \tag{11}$$

và với mọi $a, b \in E$ ta có

$$
\begin{aligned}
d(Tfa, Tfb) \le\ & s_1 k d(Ta, Tb) + s_2[d(Ta, Tfb) + d(Tb, Tfa)] \\
& + s_3 k[d(Ta, Tfa) + d(Tb, Tfb)].
\end{aligned} \tag{12}
$$

Khi đó:

1) Với mỗi $a_0 \in E$, dãy $\{Tf^n a_0\}$ hội tụ.

2) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy con thì f có điểm bất động duy nhất.

3) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $a_0 \in E$, dãy $\{f^n a_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của f.

Chứng minh. Sử dụng (9), (10), (11) ta có thể tìm được r_1, r_2, r_3 sao cho $0 \le s_i < r_i$, với $i = 1, 2, 3, \dots$ và các bất đẳng thức (2), (3), (4) được thỏa mãn. Ta xác định hàm $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ bởi

$$\varphi(t) = (r_1 - s_1)kt \quad \forall t \in [0; \infty).$$

Khi đó, $\varphi \in \Phi_1$. Từ (12) suy ra

$$
\begin{aligned}
d(Tfa, Tfb) &\le s_1 k d(Ta, Tb) + s_2[d(Ta, Tfb) + d(Tb, Tfa)] \\
&\quad + s_3 k[d(Ta, Tfa) + d(Tb, Tfb)] \\
&= r_1 k d(Ta, Tb) + r_2[d(Ta, Tfb) + d(Tb, Tfa)] \\
&\quad + r_3 k[d(Ta, Tfa) + d(Tb, Tfb)] - \varphi(d(Ta, Tb)
\end{aligned}
$$

với mọi $a, b \in E$. Do đó các điều kiện của Định lí 2.2 được thỏa mãn. Sử dụng Định lí 2.2 ta có điều cần phải chứng minh. □

Trong Hệ quả 2.5, nếu lấy (E, d) là không gian mêtric đầy đủ (tức là $k = 1$), $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ thì ta nhận được hệ quả sau.

2.6. Hệ quả. [9] Nếu (E, d) là không gian mêtric đầy đủ và $f : E \longrightarrow E$ là ánh xạ *T-co* kiểu Kannan thì f có duy nhất điểm bất động, ở đây $T : E \longrightarrow E$ là đơn ánh, liên tục và hội tụ dãy con.

2.7. Định lý. *Giả sử (E, d) là không gian kiểu b-mêtric đầy đủ, $f : E \longrightarrow E$ là ánh xạ sao cho tồn tại $\psi \in \Psi, \varphi \in \Phi_2$ và các hằng số $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \left[0, \frac{1}{k^2}\right)$ thỏa mãn*

$$\max\{r_1, r_2 + r_3, r_4\} \le \frac{1}{2k}, r_1 < \frac{1}{k^3}$$

và

$$
\begin{aligned}
\psi(d(Tfa, Tfb)) \le\ & \psi(\max\{r_1 k d(Ta, Tb), r_2 d(Ta, Tfb) \\
& + r_3 d(Tb, Tfa), r_4 k[d(Ta, Tfa) + d(Tb, Tfb)]\}) \\
& - \varphi(r_2 d(Ta, Tfb) + r_4 d(Ta, Tfa), r_3 d(Tb, Tfa) + r_4 d(Tb, Tfb))
\end{aligned} \tag{13}
$$

với mọi $a, b \in E$. Khi đó, các khẳng định sau là đúng:

1) Với mọi $a_0 \in E$, dãy $\{Tf^n a_0\}$ hội tụ.

2) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy con thì f có điểm bất động duy nhất trong E.

3) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $a_0 \in E$, dãy $\{f^n a_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của f.

Chứng minh. Lấy bất kỳ $a_0 \in E$ và xây dựng dãy $\{a_n\}$ bởi

$$a_{n+1} = fa_n = f^{n+1}a_0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots.$$

Đặt $Ta_n = b_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Sử dụng bất đẳng thức tam giác ta có

$$\begin{aligned}
&d(b_n, b_n) \leq 2kd(b_{n-1}, b_n),\\
&d(b_n, b_n) \leq 2kd(b_n, b_{n+1}) \quad \forall n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $d(b_n, b_n) \leq k[d(b_{n-1}, b_n) + d(b_n, b_{n+1})] \quad \forall n = 1, 2 \ldots$.

Đầu tiên ta chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} d(b_n, b_{n+1}) = 0$. Sử dụng điều kiện (13), với mọi $n = 1, 2, \ldots$ ta có

$$\begin{aligned}
\psi(d(b_{n+1}, b_n)) &= \psi(d(Tfa_n, Tfa_{n-1}))\\
&\leq \psi(\max\{r_1kd(b_n, b_{n-1}), r_2d(b_n, b_n) + r_3d(b_{n-1}, b_{n+1}),\\
&r_4k[d(b_n, b_{n+1}) + d(b_{n-1}, b_n)]\}) - \varphi(r_2d(b_n, b_n) + r_4d(b_n, b_{n+1}),\\
&r_3d(b_{n-1}, b_{n+1}) + r_4d(b_{n-1}, b_n))\\
&\leq \psi(\max\{r_1kd(b_n, b_{n-1}), (r_2 + r_3)k[d(b_{n-1}, b_n)\\
&+ d(b_n, b_{n+1})], r_4k[d(b_n, b_{n+1}) + d(b_{n-1}, b_n)]\})\\
&- \varphi(r_2d(b_n, b_n) + r_4d(b_n, b_{n+1}), r_3d(b_{n-1}, b_{n+1}) + r_4d(b_{n-1}, b_n))\\
&\leq \psi(rk[d(b_{n-1}, b_n) + d(b_n, b_{n+1})])\\
&- \varphi(r_2d(b_n, b_n) + r_4d(b_n, b_{n+1}), r_3d(b_{n-1}, b_{n+1}) + r_4d(b_{n-1}, b_n)), \qquad (14)
\end{aligned}$$

trong đó $r := \max\{r_1, r_2 + r_3, r_4\} \leq \dfrac{1}{2k}$.

Từ φ là hàm không âm và ψ là hàm tăng cùng (14) suy ra

$$d(b_{n+1}, b_n) \leq rk[d(b_{n-1}, b_n) + d(b_n, b_{n+1})] \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Do đó

$$d(b_{n+1}, b_n) \leq \frac{rk}{1 - rk} d(b_{n-1}, b_n) \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Vì $rk \leq \dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{rk}{1 - rk} \leq 1$. Do đó

$$d(b_{n+1}, b_n) \leq d(b_n, b_{n-1}) \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Như vậy $\{d(b_{n+1}, b_n)\}$ là dãy các số không âm và giảm. Do đó tồn tại

$$\lim_{n\to\infty} d(b_n, b_{n+1}) := c \geq 0.$$

Từ (14) sử dụng tính chất của hai hàm ψ, φ, cho $n \to \infty$ ta được

$$\psi(c) \leq \psi(2rkc) - \varphi\left(r_2 \liminf_{n\to\infty} d(b_n, b_n) + r_4c, r_4c + r_3 \liminf_{n\to\infty} d(b_{n-1}, b_{n+1})\right).$$

Kết hợp với $c \leq 2rkc$ suy ra

$$\varphi\left(r_2 \liminf_{n\to\infty} d(b_n, b_n) + r_4c, r_4c + r_3 \liminf_{n\to\infty} d(b_{n-1}, b_{n+1})\right) = 0.$$

Do đó, sử dụng tính chất của φ ta có

$$r_4 c = r_2 \liminf_{n\to\infty} d\left(b_n, b_n\right) = r_3 \liminf_{n\to\infty} d\left(b_{n-1}, b_{n+1}\right) = 0. \tag{15}$$

Nếu $r_4 \neq 0$ thì $c = 0$.

Nếu $r_4 = 0, r_2 \neq 0$ và $r_3 \neq 0$ thì từ (15) suy ra

$$\liminf_{n\to\infty} d(b_n, b_n) = \liminf_{n\to\infty} d(b_{n-1}, b_{n+1}) = 0.$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức đầu tiên trong (14) suy ra

$$\begin{aligned} d(b_{n+1}, b_n) &\leq \max\{r_1 k d(b_n, b_{n-1}), r_2 d(b_n, b_n) + r_3 d(b_{n-1}, b_{n+1})\} \\ &\leq \max\{r_1 k d(b_n, b_{n-1}), 2kr_2 d(b_{n-1}, b_n) + r_3 d(b_{n-1}, b_{n+1})\}, \end{aligned}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Cho $n \to \infty$ ta được

$$\begin{aligned} c &\leq \max\{r_1 kc, 2kr_2 c\} + \liminf_{n\to\infty} r_3 d(b_{n-1}, b_{n+1}) \\ &= \max\{r_1 kc, 2kr_2 c\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Vì $r_1 < \dfrac{1}{k^3}$ nên $r_1 k < 1$. Do $r_2 + r_3 \leq \dfrac{1}{2k}$ nên

$$r_2 \leq \frac{1}{2k} - r_3 < \frac{1}{2k} \text{ (vì } r_3 > 0).$$

Từ đó $2kr_2 < 1$. Như vậy, nếu $c > 0$ thì

$$\max\{r_1 kc, 2r_2 kc\} < c.$$

Kết hợp với (16) ta có $c = 0$.

Nếu $r_4 = r_2 = 0, r_3 \neq 0$ thì (16) trở thành $c \leq r_1 kc$.

Kết hợp với $r_1 < \dfrac{1}{k}$ suy ra $c = 0$.

Nếu $r_4 = r_3 = 0, r_2 \neq 0$ thì từ

$$d(b_{n+1}, b_n) \leq \max\{r_1 k d(b_n, b_{n-1}), r_2 d(b_n, b_n)\},$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$ suy ra

$$c \leq \max\left\{r_1 kc, r_2 \liminf_{n\to\infty} d(b_n, b_n)\right\} = r_1 ck.$$

Do đó $c = 0$.

Nếu $r_4 = r_2 = r_3 = 0$ thì tương tự như trên ta có $c \leq r_1 kc$.

Do đó $c = 0$. Như vậy

$$\lim_{n\to\infty} d(b_n, b_{n+1}) = 0.$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\{b_n\}$ là dãy Cauchy. Với mọi n và $m \in^*$ ta có

$$\begin{aligned} \psi(d(b_n, b_m)) &= \psi(d(Tfa_{n-1}, Tfa_{m-1})) \\ &\leq \psi(max\{r_1 k d(b_{n-1}, b_{m-1}), r_2 d(b_{n-1}, b_m) \\ &\quad + r_3 d(b_{m-1}, b_n)\}, r_4 k[d(b_{n-1}, b_n) + d(b_{m-1}, b_m)]) \\ &\quad - \varphi(r_2 d(b_{n-1}, b_m) + r_4 d(b_{n-1}, b_n), \\ &\quad r_3 d(b_{m-1}, b_n) + r_4 d(b_{m-1}, b_m)). \end{aligned}$$

Do đó, với mọi $n, m \in^*$ ta có

$$\begin{aligned}
d(b_n, b_m) &\le \max\{r_1 k d(b_{n-1}, b_{m-1}), r_2 d(b_{n-1}, b_m) \\
&\quad + r_3 d(b_{m-1}, b_n), r_4 k[d(b_{n-1}, b_n) + d(b_{m-1}, b_m)]\} \\
&\le \max\{r_1[k^2 d(b_{n-1}, b_n) + k^3 d(b_n, b_m) + k^3 d(b_m, b_{m-1})], \\
&\quad r_2 k[d(b_{n-1}, b_n) + d(b_n, b_m)] + r_3 k[d(b_{m-1}, b_m) + d(b_m, b_n)], \\
&\quad r_4 k[d(b_{n-1}, b_n) + d(b_{m-1}, b_m)]\} \\
&\le k^2 r d(b_{n-1}, b_n) + k^3 r d(b_m, b_{m-1}) \\
&\quad + \max\{r_1 k^3, (r_2 + r_3)k\} d(b_n, b_m). \qquad (17)
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$d(b_n, b_m) \le \frac{k^2 r}{1 - \max\{r_1 k^3, (r_2 + r_3)k\}}[d(b_{n-1}, b_n) + k d(b_m, b_{m-1})],$$

với mọi $n, m \in^*$.

Từ $r_1 < \dfrac{1}{k^3}$ và $r_2 + r \le \dfrac{1}{2k} < \dfrac{1}{k}$ suy ra $1 - \max\left\{r_1 k^3, (r_2 + r_3)k\right\} > 0$.

Kết hợp với

$$\lim_{n\to\infty} d(b_{n-1}, b_n) = \lim_{m\to\infty} d(b_{m-1}, b_m) = 0$$

ta suy ra

$$\lim_{n,m\to\infty} d(b_n, b_m) = 0.$$

Do đó $\{b_n\}$ là dãy Cauchy. Vì (E, d) là không gian kiểu b-mêtric đầy đủ, nên tồn tại $b \in E$ sao cho

$$d(b, b) = \lim_{n\to\infty} d(b_n, b) = \lim_{n,m\to\infty} d(b_n, b_m) = 0,$$

tức là

$$T f^n a_0 = T a_n = b_n \to b.$$

2) Giả sử T là ánh xạ hội tụ dãy con. Ta chứng minh f có điểm bất động. Vì T là ánh xạ hội tụ dãy con và $\{T f a_n\} = \{b_{n+1}\}$ là dãy hội tụ nên tồn tại dãy con $\{a_{n_i}\}$ của $\{a_n\}$ sao cho $a_{n_i} \to a$ và $d(Ta, Ta) = 0$. Khi đó $d(a_{n_i}, a) \to d(a, a)$. Vì T liên tục nên $d(T a_{n_i}, Ta) \to d(Ta, Ta) = 0$ hay

$$d(b_{n_i}, Ta) \to 0 \text{ khi } n_i \to \infty.$$

Mặt khác, từ $d(b_n, b) \to 0$ khi $n \to \infty$ suy ra

$$d(b_{n_i}, b) \to 0 \text{ khi } n_i \to \infty.$$

Sử dụng Định lý 1.11, suy ra $b = Ta$. Do đó $T f a_n = b_{n+1} \to Ta$. Sử dụng Định lý 1.11, ta có

$$\frac{1}{k} d(Ta, Tfa) \le \liminf_{n\to\infty} d(T f a_n, T f a).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{1}{k}d(Ta,Tfa)\right) &\le \psi\left(\liminf_{n\to\infty} d(Tfa,Tfa_n)\right)\\
&\le \liminf_{n\to\infty}\psi\left(d(Tfa,Tfa_n)\right) \le \limsup_{n\to\infty}\psi\left(d(Tfa,Tfa_n)\right)\\
&\le \limsup_{n\to\infty}\psi(\max\{r_1kd(Ta,b_n), r_2d(Ta,b_{n+1})\\
&+ r_3d(b_n,Tfa), r_4k[d(Ta,Tfa)+d(b_n,b_{n+1})]\})\\
&\le \psi\Bigg(\limsup_{n\to\infty}\max\{r_1kd(b,b_n), r_2d(b,b_{n+1})\\
&+ r_3d(b_n,Tfa), r_4k[d(b,Tfa)+d(b_n,b_{n+1})]\}\Bigg)\\
&\le \psi(\max\{r_3kd(b,Tfa), r_4kd(b,Tfa)\})\\
&\le \psi(k\max\{r_3,r_4\}d(b,Tfa)).
\end{aligned}$$

Kết hợp với $\max\{r_3,r_4\} < \dfrac{1}{k^2}$ suy ra $d(b,Tfa)=0$. Do đó $b=Tfa$ hay $Ta=Tfa$. Vì T đơn ánh nên $a=fa$. Vậy a là điểm bất động của f.

Cuối cùng, ta chứng minh điểm bất động của f là duy nhất. Giả sử t cũng là điểm bất động của f trong E. Khi đó,

$$\begin{aligned}
\psi(d(Tt,Tt)) &= \psi(d(Tft,Tft))\\
&\le \psi(\max\{r_1kd(Tt,Tt), (r_2+r_3)d(Tt,Tt), 2r_4kd(Tt,Tt)\})\\
&- \varphi((r_2+r_4)d(Tt,Tt),(r_3+r_4)d(Tt,Tt))\\
&\le \psi(d(Tt,Tt)) - \varphi((r_2+r_4)d(Tt,Tt),(r_3+r_4)d(Tt,Tt)).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\varphi\left((r_2+r_4)d(Tt,Tt),(r_3+r_4)d(Tt,Tt)\right)=0.$$

Do đó

$$(r_2+r_4)d(Tt,Tt)=(r_3+r_4)d(Tt,Tt)=0.$$

Nếu một trong các giá trị r_2,r_3,r_4 mà khác 0 thì ta có $d(Tt,Tt)=0$. Nếu $r_2=r_3=r_4=0$ thì

$$\psi(d(Tt,Tt)) \le \psi(r_1kd(Tt,Tt)).$$

Kết hợp với $0\le r_1 < \dfrac{1}{k^3}$ suy ra $d(Tt,Tt)=0$. Như vậy ta luôn có

$$d(Tt,Tt)=0.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\psi(d(Ta,Tt)) &= \psi(d(Tfa,Tft))\\
&\le \psi(\max\{r_1kd(Ta,Tt), (r_2+r_3)d(Ta,Tt),\\
&\quad r_4k[d(Ta,Ta)+d(Tt,Tt)]\})\\
&= \psi(\max\{r_1kd(Ta,Tt),(r_2+r_3)d(Ta,Tt)\}).
\end{aligned}$$

Kết hợp với $r_1k<1$ và $r_2+r_3<1$ suy ra $d(Ta,Tt)=0$. Do đó $Ta=Tt$. Vì T đơn ánh nên $t=a$. Vậy điểm bất động của f là duy nhất.

3) Giả sử T là ánh xạ hội tụ dãy. Khi đó, trong chứng minh 2) ở trên, thay dãy con $\{a_{n_i}\}$ bởi $\{a_n\}$ ta có $fa_n \to a$, tức $f^{n+1}a_0 \to a$. Do đó $f^n a_0 \to a$ và a là điểm bất động của f. □

Sau đây là một hệ quả của Định lý 2.7.

2.8. Hệ quả. [10] *Giả sử* (E, d) *là không gian kiểu b-mêtric đầy đủ,* T *và* $f : E \longrightarrow E$ *là hai ánh xạ thỏa mãn:*

i) T *đơn ánh và liên tục;*

ii) Tồn tại $\psi \in \Psi, \varphi \in \Phi_2$ *sao cho với mọi* $a, b \in E$*, ta có*

$$\psi(d(Tfa, Tfb)) \leq \psi\left(\frac{d(Ta, Tfa) + d(Tb, Tfb)}{k+1}\right) - \varphi(d(Ta, Tfa), d(Tb, Tfb)). \tag{18}$$

Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:

1) Với mỗi $a_0 \in E$*, dãy* $\{Tf^n a_0\}$ *hội tụ.*

2) Nếu T *là ánh xạ hội tụ dãy con thì* f *có duy nhất điểm bất động trong* E*.*

3) Nếu T *là ánh xạ hội tụ dãy với mỗi* $a_0 \in E$*, dãy* $\{f^n a_0\}$ *hội tụ tới điểm bất động của* f*.*

Chứng minh. Ta xác định các hàm

$$\psi_1 : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \varphi_1 : [0, \infty)^2 \longrightarrow [0, \infty)$$

cho bởi các công thức

$$\psi_1(t) = \psi(t), \quad \forall t \in [0, \infty),$$
$$\varphi_1(t, u) = \varphi(kt(k+1), ku(k+1)), \quad \forall (t, u) \in [0, \infty)^2.$$

Khi đó, từ $\psi \in \Psi$ và $\varphi \in \Phi_2$ suy ra $\psi_1 \in \Psi$ và $\varphi_1 \in \Phi_2$. Sử dụng điều kiện (18), ta có

$$\begin{aligned}\psi_1(d(Tfa, Tfb)) &= \psi(d(Tfa, Tfb)) \\ &\leq \psi\left(\frac{d(Ta, Tfa) + d(Tb, Tfb)}{k+1}\right) \\ &\quad - \varphi(d(Ta, Tfa), d(Tb, Tfb)) \\ &= \psi(rk[d(Ta, Tfa) + d(Tb, Tfb)]) \\ &\quad - \varphi_1(rd(Ta, Tfa), rd(Tb, Tfb))\end{aligned}$$

với mọi $a, b \in E$, trong đó $r = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Từ đó suy ra các điều kiện của Định lý 2.7 được thỏa mãn với

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0, r_4 = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Do đó sử dụng Định lý 2.7 ta có điều cần chứng minh. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. A. Alghamdi, N. Hussain, P. Salimi, *Fixed point and coupled fixed point theorems on b-metric-like spaces*, J. Inequalities. Appl, 2013, pp. 402.

[2] S. K. Chatterjea, *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 25, 1972, pp. 727-730.

[3] C. Chen, J. Dong and C. Zhu, *Some fixed point theorems in b-metric-like spaces*, Fixed Point Theory. Appl, 2015, 2015:122.

[4] B. S. Choudhury, *Unique fixed point theorem for weak C-contractive mappings*, Kathmandu Univ. J. Sci. Eng. Technol, 5(1), 2009, pp. 6-13.

[5] S. Czerwik, *Contraction mappings in b-metric spaces*, Acta Math. Inform. Univ. Ostrav, 1, 1993, pp. 5-11.

[6] N. Hussain, J. R. Roshan, V. Parvaneh and Z. Kadelburg, *Fixed point of contractive mappings in b-metric-like spaces*, Sci. World. J, Volume 2014, pp. 15.

[7] R. Kannan, *Some results on fixed point,* Bull. Calcutta Math. Soc, 60, 1968, pp. 71-76.

[8] M. S. Khan, M. Swaleh, S. Sessa , *Fixed point theorems by altering distances between the points*, Bull. Aust. Math. Soc, 30, 1984, pp. 1-9.

[9] S. Moradi, *Kannan fixed-point theorem on complete metric spaces and on generalized metric spaces depended on another funtion*, arXiv: 0903.1577v1 [math.FA].

[10] Z. Mustafa, J. R. Roshan, V. Parvaneh and Z. Kadelburg, *Fixed point theorems for weakly T-Chatterjea and weakly T-Kannan contractions in b-metric spaces*, J. Inequalities. Appl, 2014.

[11] A. Razani, V. Parvanch, *Some fixed point theorems for weakly T-Chatterjea and weakly T-Kannan contractive mappings in complete metric spaces*, Russ. Math. (Izv. VUZ), 53 (3), 2013, pp. 38-45.

SUMMARY

ON EXISTENCE OF FIXED POINTS FOR WEAKLY T-CONTACTIVE AND GENERALIZED WEAKLY T-CONTACTIVE MAPPINGS IN B-METRIC-LIKE SPACES

In this paper, we prove some results for the existence and uniqueness fixed points for weakly T-contactive and generalized weakly T-contactive mappings in b-metric-like spaces. Our results extend and generalize the results in [3] [10].